

YATIRIMCI BEKLENTİLERİNİN BLACK-LITTERMAN OPTİMİZASYON MODELİ İLE DEĞERLENDİRİLMESİ: BORSA İSTANBUL UYGULAMASI

*AN EVALUATION OF INVESTOR EXPECTATIONS
WITH THE BLACK-LITTERMAN OPTIMIZATION MODEL:
THE CASE OF ISTANBUL STOCK EXCHANGE CORPORATION*

Dr. Seda SÜER

Dokuz Eylül Üniversitesi İşletme Fakültesi İşletme Bölümü

Özet

Fischer Black ve Robert Litterman tarafından geliştirilen Black-Litterman Optimizasyon Modeli, yatırımcı beklentilerinin optimal portföy seçim sürecine dahil edilmesini sağlayan bir modeldir. Yatırımcıların beklenti getirileri tahmini bir bilgi niteliğinde olup içsel, kişisel veya subjektif getiriler olarak da ifade edilir. Optimal portföy seçim sürecinde Black-Litterman Modeli ile yatırımcıların bir veya birden fazla varlığın beklenen getirileri hakkındaki subjektif beklentileri ile piyasa denge getirilerini birleştirilerek, yeni beklenen getirilerin hesaplanması sağlanmaktadır.

Bu çalışmada, 01 Ocak 2004 ile 30 Haziran 2013 tarihleri arasında Borsa İstanbul Anonim Şirketi (BİST) Ulusal 100 endeksinde devamlılık gösteren 39 şirkete Black-Litterman Modeli uygulanarak optimal portföy seçimi gerçekleştirilmiştir. Araştırmada öncelikle yatırımcı beklentileri belirtilmiş ve bu beklentilere güvenilirlik oranları belirlenmiştir. Daha sonra Black-Litterman Modeli uygulanarak nihai getiriler hesaplanmış ve böylece portföy ağırlıkları revize edilmiştir. Ayrıca, belirtilen yatırımcı beklentilerinin %100 güvenilirlik oranına göre beklentilerin varyans matrisinin bulunmadığı Black-Litterman Modeli uygulanarak yeni nihai getiriler hesaplanmış ve bu getiriler doğrultusunda portföy ağırlıkları revize edilmiştir.

Bu çalışmanın amacı, yatırımcının tek bir beklentisinin ve bu beklentiye yatırımcı tarafından belirlenen güvenilirlik oranı dikkate alınarak nihai getirilerin hesaplanması ve bu getiriler doğrultusunda portföy ağırlıklarının revize edilmesi için farklı bir analizin uygulanmasıdır. Sonuç olarak, Black-Litterman Modeli ile nihai getirilere ters optimizasyon uygulanarak yeni ağırlıklara sahip optimal portföyler elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Optimal Portföy Seçimi, Portföy Optimizasyonu, Black-Litterman Modeli, Varlık Dağılımı, Yatırımcı Beklentileri

Abstract

The Black-Litterman Optimization Model, developed by Fischer Black and Robert Litterman, is an optimal portfolio construction model that the expectations of the investor can be brought in the formulation of optimization. Investors return expectations are a kind of estimated information, also referred to as personal or subjective returns. In

the process of optimal portfolio selection Black-Litterman Model combine the subjective expectations of an investor regarding the expected returns of one or more assets with the market equilibrium vector of expected returns to compute the new mixed estimate of expected returns. Investors expected return vector (Q), represents the investor's estimated expected return on each asset in the portfolio.

In this study, optimal portfolio selection was performed by applying the Black-Litterman Model to National 100 Index of 39 companies showing the continuity for the period between 01 January 2004 to 30 June 2013 on Istanbul Stock Exchange Corporation (BIST). Then, by applying the Black-Litterman Model final returns are calculated and therefore the portfolio weights are revised. In addition, by investor expectations under 100% certainty rate new final returns are calculated and portfolio weights are revised accordingly, by applying the Black-Litterman Model without the variance matrix expectations.

The purpose of this study is to calculate the investor's one single expectation and the certainty rate which is determined by the investor for this expectation and to implement a different analysis for the revision of the portfolio weight in the final return line. In result, with Black-Litterman Model portfolios with sensible portfolio weights are obtained by applying reverse optimization to the final returns.

Key Words: Optimal Portfolio Selection, Portfolio Optimization, Black-Litterman Model, Asset Allocation, Investor Expectations

GİRİŞ

Her yatırımcı, fonlarının farklı varlıklar arasında ve portföylerinde nasıl optimal dağılacağı sorunuyla karşı karşıya kalmaktadır. Çünkü her yatırımcı getiriye maksimize ederken riski minimize etmek istemektedir. Böylece, matematiksel modeller geliştirilmiş ve varlık dağılımı sorununa açıklık getirilmeye çalışılmıştır. Bu modellerden, en önemlisi Markowitz Ortalama-Varyans Modeli'dir. Ancak, Markowitz Ortalama-Varyans Modeli sadece teorik bir çözüm olduğu için eleştirilere konu olmuştur. Çünkü, uygulamada Markowitz Ortalama-Varyans Modeli, girdi-hassasiyeti ve tahmin hatası ile aşırı yoğunlaşmış portföylerin oluşturulmasına sebep olmaktadır. Dolayısıyla, Ortalama-Varyans Optimizasyon Modeli'yle oluşturulan portföyler, teorik varsayımlar (sermaye piyasası varsayımları) ile analiz sonuçları (varlık dağılımları) elde edilen tahminlere karşı aşırı duyarlıdır. Bir portföy içinde belli varlıkların aşırı yer almasını engellemek amacıyla geliştirilen Black-Litterman Modeli'ni kullanarak daha iyi-çeşitlendirilmiş varlık dağılımına sahip portföylerin oluşturulması mümkün olmaktadır. Black-Litterman Modeli öncesinde yapılan çalışmalarda yatırımcıların varlıklar hakkındaki beklentilerini optimal portföy seçim sürecine dahil etmeleri mümkün olmamıştır. Bu bakımdan, Black-Litterman Modeli optimal portföy seçim konusuna yeni bir bakış açısı ve yöntem kazandırmıştır.

Black-Litterman Modeli kullanılarak yapılan ilk çalışma, modele kendi isimlerini veren Fisher Black ve Robert Litterman (1990) tarafından yapılmıştır. Black-Litterman Modeli ilk kez 1991 yılında Fischer Black ve Robert Litterman tarafından Goldman Sachs'ın bir yayını olan "Journal of Fixed Income" dergisinde yayımlandı. Fisher Black ve Robert Litterman (1991) çalışmalarında Black-Litterman Modeli hakkında bazı açıklamalara yer vermişlerdir. Ancak çalışmalarında modelin önemli ayrıntılarına değinilmediği gibi modelin sonuçlarını yeniden uygulayabilmek için gerekli olan tüm veriler bulunmamaktaydı (Walters, 2009, s.1; Black ve Litterman, 1991).

Fisher Black ve Robert Litterman (1992) tarafından yapılan ikinci çalışma "Financial Analysts Journal" dergisinde yayımlandı. Bu çalışmada, modelin temel varsayımlarıyla ve yönteminin mantıksal temeli ile ilgili açıklamalar yapılmıştır. Ancak modelin oluşturulmasını

sağlayan tüm denklemler veya tüm türevler gösterilmemiştir. Ne yazık ki bu iki sorundan dolayı çalışmalarda sonuçları yeniden elde etmek mümkün değildir. Black-Litterman Modeli'nin uygulanması için gerekli bazı denklemlere yer verilmesine rağmen nihai varyans için herhangi bir denklem belirtilmemiştir. Ayrıca çalışmalarında kullanılan ancak açıkça tanımlanmayan bir parametre olan beklentilerin güvenilirliği parametresinden çok az bahsedilmiştir (Black ve Litterman, 1992).

Fisher Black ve Robert Litterman (1990) tarafından geliştirilen Black-Litterman Modeli, optimal portföy seçimi ile ilgili yapılan çeşitli çalışmalarda kullanılmıştır. Bu çalışmalar modelin ayrıntılı açıklamalarını içeren önemli kaynaklardır. Böylece modelin hem uygulanabilirliği kanıtlanmış hem de bu çalışmalarda sunulan girdiler ile sonuçların tekrar edilebilirliği sınanmıştır. Bu model ile yapılan diğer çalışmalarda ise model araştırmacılar tarafından geliştirilerek; üzerinde yeni düzenlemeler ve küçük değişikliklerle çok yönlü ve farklı analizler gerçekleştirilmiştir. Black-Litterman Modeli kullanılarak ve bu modelin yardımıyla yapılan yeni çalışmalar aşağıda özetlenmektedir:

Bevan ve Winkelmann (1998) Goldman Sachs şirketinde yaptıkları çalışmada Black-Litterman Modeli'ni optimal portföy seçim sürecinin bir parçası olarak nasıl kullandıklarını ayrıntılarıyla açıklamışlardır. Çalışmalarında, Black-Litterman Modeli'ni kullanarak varlıklar arasında oynaklık ve korelasyonlar ile optimal portföy ağırlıklarını hesaplamışlardır. Bu model ile risk kontrollü portföyler geliştirilerek yatırımcılar ve yatırım danışmanlarının beklentileriyle tutarlı yatırım tavsiyeleri oluşturulmuştur. Böylece, yatırımcı beklentilerinin optimal portföy seçim sürecine dahil edilmesiyle yatırım yönetimi problemlerinin çözümüne katkı sağlanmıştır (Bevan ve Winkelmann, 1998).

He ve Litterman (1999) tarafından yapılan çalışmada optimal portföy seçim sürecinde Black-Litterman Modeli bir örnekle açıklanmıştır. Çalışmanın verileri ve uygulama adımları net olarak açıklanarak çalışmanın sonuçları yeniden elde edilebilmektedir. Çalışmada Black-Litterman Modeli ile elde edilen portföyler ile standart Ortalama-Varyans Modeli'yle elde edilen portföyler karşılaştırılmıştır. Black-Litterman Modeli'nin en karmaşık kısmı olarak bilinen yatırımcı beklentilerinin modele dahil edilmesi ile ilgili detaylı açıklamalar yapılmıştır (He ve Litterman, 1999).

Satchell ve Scowcroft (2000) çalışmalarında Black-Litterman Modeli'ni detaylı bir şekilde açıkladıklarını iddia etmişlerdir, ancak sonuçları elde etmek için yeterli bilgi bulunmamaktadır. Ayrıca, τ parametresi hakkında diğer araştırmacılardan daha farklı bir yaklaşıma sahip oldukları gözlenmiştir. τ parametresinin "1" olarak tespit edilmesinin nedeni ise tam olarak belirtilmemiştir, ancak Black-Litterman Modeli'nin "ana denklemi"nin türevleri ayrıntılı olarak gösterilmiştir (Satchell ve Scowcroft, 2000).

Qian ve Gorman (2001) çalışmalarında koşullu ortalama ve koşullu kovaryans tahminlerini sağlama amacıyla bir yöntem geliştirmişlerdir. Bayes yaklaşımını temel alarak Black-Litterman Modeli'ni referans model olarak kullanmışlardır. Çalışmalarında τ parametresinin bulunmadığı alternatif referans modelini uygulamışlardır (Qian ve Gorman, 2001).

Drobetz (2001) çalışmasında Black-Litterman Modeli'nin temel adımlarını detaylandırarak incelemiştir. Yatırımcı beklentilerinin optimal portföy seçim sürecinde modele dahil edilebilmesiyle modelin standart Ortalama-Varyans Modeli'ne göre esnekliği örnek ile incelenmiştir (Drobetz, 2001).

Christadoulakis (2002), Da ve Jagnannathan'ın (2005) varlık dağılımı ile ilgili çalışma notları vardır. Christadoulakis'in (2002) çalışması Black-Litterman Modeli'nin varsayımları ve Bayes yaklaşımı hakkında daha detaylı bilgi sağlamaktadır. Ayrıca nihai getiriler için anahtar

denklemler bir bir sıralanmaktadır (Christadoulakis, 2002). Da ve Jagnannathan (2005) çalışmalarında daha basit bir örnek sunmuşlardır (Da ve Jagnannathan, 2005).

Herold (2003) çalışmasında Black-Litterman Modeli'nin uygulanmasının en zor kısım olarak yatırımcı beklentilerinin varyans matrisinin (Ω) hesaplanması olduğunu savunmuştur. Bu matrisin hesaplanmasında yatırımcının her bir beklenti için olasılık yoğunluk fonksiyonunun kullanılması gerektiğini ileri sürmüştür. Bundan dolayı, Black-Litterman Modeli'nin sadece kantitatif yatırımcılar tarafından kullanılabileceğini belirtmiştir (Herold, 2003).

Fusai ve Meucci (2003) çalışmalarında nihai getiri tahminleri ile birincil getiri tahminleri arasındaki farkı istatistiksel olarak ölçmek için yeni bir yöntem sunmuşlardır. Böylece beklentilerin belirsizliğinin hesaplanmasında farklı bir yöntem kullanarak birincil denge tahminleri açısından değerlendirildiğinde nihai tahminlerin aşırı olmamasını sağlamışlardır. Çalışmalarında Alternatif Referans Modeli'ni kullanmışlardır. Ölçümleri Theil'in Uyumluluk Ölçüsüne benzemektedir. Ancak Alternatif Referans Modeli'nde nihai getiriler için birincil varyans kullanıldığından varyansın herhangi bir türevi gerekmemektedir (Fusai ve Meucci, 2003).

Idzorek (2005) Black-Litterman Modeli'ni bir örnek ile açıklamıştır. Çalışmasında kullandığı verileri sunarak modelin uygulamasını adım adım anlatmıştır. Ancak sonuçlar yeniden hesaplandığında, nihai varyansın He ve Litterman'ın (1999) çalışmasıyla aynı şekilde ele alınmadığı gözlenmiştir (Idzorek, 2005).

Krishnan ve Mains (2005) çalışmalarında Black-Litterman Modeli'ne piyasa ile korelasyonu olmayan bir faktörü ekleyerek modele katkı sağlamışlardır. Buna "İki-Faktörlü Black-Litterman Modeli" denilmiştir. Durgunluk faktörünün Black-Litterman Modeli'ne olan etkisi bir örnek ile gösterilmiştir. Bu örnek ile faktörün Black-Litterman Modeli ile hesaplanan beklenen getirileri nasıl etkilediği açıklanmıştır (Krishnan ve Mains, 2005).

Mankert (2006) çalışmasında nihai tahmini varlık getirilerini elde etmek için Black-Litterman Modeli'nin stratejik ve taktik varlık dağılımı kararları arasında detaylı bir bileşim sağlayarak modele somut bir katkı sağlamıştır. Modelin stratejik varlık dağılımı kararlarını SVFM ile elde edilen piyasa denge getirileri oluşturmaktadır. Modelin taktik varlık dağılımı kararlarını ise yatırımcı beklentilerinin oluşturduğu belirtilmiştir. Bilindiği gibi, yatırımcı beklentilerinin başlangıç noktası SVFM ile elde edilen birincil bilgilerden oluşmaktadır. Bu çalışmada, örneklem teorisini kullanarak τ parametresi ile ilgili yeni bir bakış açısı sağlanmıştır (Mankert, 2006).

Meucci (2006) çalışmasında normal olmayan beklentilerin Black-Litterman Modeli'nde kullanılmasını sağlayan bir yöntem geliştirmiştir. Bu beklentilerin uygulandığı yöntem örnek ile detaylı olarak gösterilmiş ve Matlab uygulaması paylaşılmıştır (Meucci, 2006). Meucci (2008) çalışmasında bu yöntemi her model parametresi için geliştirmiş ve hem tam dağılım analizinin hem de senaryo analizinin uygulanmasına olanak sağlamıştır (Meucci, 2008).

Braga ve Natale (2007) çalışmalarında "Takip Hatası Oynaklığı" duyarlılığını kullanarak Black-Litterman Modeli'ne kısıt getirmişlerdir. Böylece, yatırımcıların "Takip Hatası Oynaklığı" kısıtı ile portföyü devamlı revize etmeyi sağlayan bir yöntem geliştirmişlerdir. Varlığın performansı hakkında belirtilen beklentiler için önceden tahmin edilmiş "Takip Hatası Oynaklığı" duyarlılığını sağlayan yeni bir ölçüt kullanılmıştır (Braga ve Natale, 2007).

Beach ve Orlov (2007) çalışmalarında yatırımcıların beklentilerinin düzenlenmesi amacıyla EGARCH-M modeline dayalı Black-Litterman Modeli'ni uygulayarak yeni bir yöntem geliştirmişlerdir (Beach ve Orlov, 2007).

Martellini ve Ziemann (2007) çalışmalarında Black-Litterman Modeli'ni Bayes yaklaşımıyla uygulayarak hedge fon evreninde aktif varlık dağılımı kararları için bir uygulama yapmışlardır (Martellini ve Ziemann, 2007).

Pezier (2007) çalışmasında Black-Litterman Modeli'nde "En Küçük Ayırım Prensibini" uygulamıştır. En küçük ayırım yöntemi ile beklenen getiriler, korelasyon ve esneklik ile ilgili her beklentinin modele dahil edilmesini sağlayan optimal portföyler oluşturulmuştur (Pezier, 2007).

Cheung (2009) çalışmasında Black-Litterman Modeli'ne dayalı yeni yöntemler kullanarak faktör düzenleme yaklaşımını modele dahil etmiştir. Yatırım evreni için bir faktör modelin seçilmesini veya yeni faktör modellerin oluşturulup faktör beklentilerinin de Black-Litterman Modeli'ne dahil edilmesini sağlamıştır (Cheung, 2009).

Silva ve diğerleri (2009) çalışmalarında aktif portföy yönetimini Black-Litterman Modeli'nde Bayes yaklaşımını kullanarak değerlendirmişlerdir. Portföy optimizasyonunun zorluklarından biri, beklenen getiri girdilerindeki küçük farkların bazen büyük portföy ağırlıkları oluşturarak aşırı portföy dağılımlarına sebep olmasıdır. Onlara göre, aktif yatırım politikasında Black-Litterman Modeli'nde Bayes yaklaşımı kullanılarak, denge getirileri ve yatırımcı beklentilerinin birleşimiyle bu sorunun hafifletilmesi sağlanabilmektedir (Silva ve diğerleri, 2009).

Gofman ve Manela (2010) çalışmalarında Black-Litterman denge modelinin portföy seçimi yaklaşımına faydalarını değerlendirmişlerdir. Bu modeli, doğrusal çok faktörlü varlık fiyatlama yaklaşımı ile genişletmişlerdir. Daha sonra Bayes yaklaşımını kullanarak denge modeli belirsizliğini içeren çıkarım problemini ortaya koymuşlardır. Bu yeni yöntemler ile farklı denge modellerinin portföy performansını nasıl etkilediğini araştırmışlardır (Gofman ve Manela, 2010).

Wang (2012) çalışmasında orijinal modelde değişiklikler yaparak, enflasyona dayalı ve "Black-Litterman Enflasyon Modeli" olarak adlandırılan yeni bir model geliştirmiştir. Matematik ve ampirik testlerle araştırmacı, varlık dağılımında enflasyonla mücadelede "Black-Litterman Enflasyon Modeli"nin orijinal modele göre daha üstün olduğunu kanıtlamaktadır. Ayrıca, araştırmacı yatırımcıların yatırım varlıkları ile ilgili farklı beklenen getirileri için farklı enflasyon risk duyarlılıklarına sahip olduklarını ortaya koymuştur (Wang, 2012).

Bu çalışmanın amacı ise Borsa İstanbul Anonim Şirketi (BİST) Ulusal 100 endeksinden oluşturulan portföyde varlıkların dağılımını yatırımcı beklentileri doğrultusunda revize etmektir. Optimal portföy seçim sürecinde Black-Litterman Modeli'nin en önemli katkısı yatırımcı beklentilerinin modele dahil edilebilmesidir. Bu anlamda uygulamanın önemi yatırımcı beklentilerinin optimal portföy seçim sürecine yansıtılmasını sağlayabilmektir. Bu yüzden, araştırmada belirlenen tarih aralığında hisse senetleri BİST Ulusal 100 endeksinde devamlılık gösteren şirketlere Black-Litterman Modeli uygulanarak optimal portföy seçim sürecinde bazı varlıkların aşırı yoğunlaşması sorununa çözüm getirilmesi amaçlanmaktadır. Black-Litterman Modeli kullanılarak yatırımcı beklentilerinin optimal portföy seçim sürecine nasıl dahil edildiği adım adım incelenip sonuçları yorumlanmıştır. Bu çalışmada, diğer çalışmalardan farklı olarak her bir yatırımcı beklentisi tek tek değerlendirilmiştir.

Bu çalışmada, öncelikle Black-Litterman Modeli açıklanarak araştırmanın veri seti ve yöntemi açıklanmıştır. Sermaye Varlıkları Fiyatlandırma Modeli'ne (SVFM) dayalı olarak elde edilen piyasa denge getirileri hesaplanıp, Black-Litterman Modeli'nin taktik varlık dağılımı kararlarını oluşturan yatırımcı beklentileri belirtilmiştir. Böylece, Black-Litterman Modeli'nin ana denklemi kullanılarak nihai getiriler hesaplanmıştır. Son olarak, bu çalışmayı diğer çalışmalardan ayıran en önemli özelliği olan yatırımcı tarafından belirtilen her bir yatırımcı

beklentisinin ayrı ayrı incelenmesi ve değerlendirilmesi Black-Litterman Modeli'nin ana denklemindeki küçük değişiklikler ve farklılıklarla elde edilerek hesaplanmıştır.

1. Black-Litterman Modeli

Optimal portföy seçiminde yatırımcının varlıkların tahmini getirileri hakkındaki beklentilerini portföy ağırlıklarına yansıtılmasını sağlayan Black-Litterman Modeli'nin geliştirilmesi portföy optimizasyonu alanında önemli bir gelişmedir. Black-Litterman Modeli, Sermaye Varlıkları Fiyatlandırma Modeli'ne (SVFM) dayalı olarak elde edilen piyasa denge getirileriyle yatırımcıların bu getiriler hakkındaki subjektif tahminlerinin (beklentilerinin) bileşimiyle tutarlı (nihai) varlık getiri tahminlerine ulaşılmasını sağlamaktadır. SVFM ile elde edilen piyasa denge getirileri Black-Litterman Modeli'nin stratejik varlık dağılımı kararlarını oluşturmaktadır. Yatırımcıların SVFM denge getirileri hakkındaki subjektif tahminleri (beklentileri) ise Black-Litterman Modeli'nin taktik varlık dağılımı kararlarını oluşturmaktadır.

Black-Litterman Modeli'nin dayandığı iki temel varsayım bulunmaktadır. Bunlardan ilki, modelde tüm varlık getirilerinin aynı olasılık dağılımını (genellikle normal dağılım seçilir, ancak yatırımcılar uygun gördükleri herhangi bir dağılımı seçebilir) izlediği varsayıdır. İkinci varsayım ise birincinin varyansının, varlıkların gerçek ortalaması hakkında koşullu dağılımın ve yatırımcı beklentilerinin bilinmemesidir (Xu ve diğerleri, 2008, s. 2). Dolayısıyla, Black-Litterman Modeli'nin uygulanmasında iki bilgi kaynağı kullanılmaktadır. Bunlardan ilki SVFM ile elde edilen denge getirileri dağılımıdır. Diğeri ise beklenti getirilerinin dağılımıdır. Black-Litterman Modeli bu iki dağılımın birleştirilmesini sağlamaktadır. SVFM ile elde edilen denge getirilerini temel alan ancak ayrıca yatırımcı beklenti getirilerini yansıtan yeni bir tahmini beklenen getiriler elde edilmektedir. Bunu uygularken, Black-Litterman Modeli hem beklenen getiriler ile betalar arasındaki tutarlı ilişkiyi korur hem de belirtilen beklentileri yansıtan birleştirilmiş tahmini beklenen getiriler ile daha iyi-çeşitlendirilmiş varlık dağılımlarını başarıyla gerçekleştirir (Idzorek, 2006, s.11).

Black-Litterman Modeli'nin yöntemi üç ana adımda gerçekleştirilir. Daha önce bahsedildiği gibi modelin ilk adımı piyasa denge getirilerinin hesaplanmasıdır. Bu ilk adım modelin stratejik varlık dağılımı kararları olarak da ifade edilmektedir. Modelin ikinci adımında ise denge getirilerine göre yatırımcının portföy içindeki varlıklar hakkındaki beklenti getirileri belirlenmektedir. Bu yatırımcı beklentileri subjektif ve kişisel olduğundan yatırımcının taktik varlık dağılımı kararları olarak da ifade edilmektedir. Modelin üçüncü adımında ise denge getirileri ile yatırımcı beklentileri birleştirilerek nihai getiriler elde edilir. Nihai getiriler vektörü ile denge getirileri vektörü karşılaştırılarak portföy ağırlıkları revize edilir, böylece daha iyi-çeşitlendirilmiş optimal portföyler elde edilmektedir. Böylece, daha önce bahsedildiği gibi Markowitz'in Ortalama-Varyans Modeli'nin en çok eleştirilen yanı olan aşırı yoğunlaşmış portföylerin oluşumu önlenmiş olmaktadır (Idzorek, 2006, s.11).

Aşırı yoğunlaşmış portföylerin oluşturulmasını önlemek amacıyla geliştirilen Black-Litterman Modeli ile elde edilen nihai beklenen getirilerin "ana denklemi" aşağıda gösterilmiştir:

$$E(R) = [(\tau\Sigma)^{-1} + (P'\Omega^{-1}P)]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}Q] \quad (1)$$

Burada;

τ : Denge varyansının belirsizlik ölçüsünü (genellikle $0 < \tau < 1$ arasında bir değerdir),

Σ : Kovaryans matrisini ($n \times n$ matrisi),

P : Yatırımcı beklenti matrisini ($k \times n$ matrisi veya sadece bir beklentinin olduğu özel durumda $1 \times n$ sıra vektörüdür. Bundan dolayı $k \leq n$ olur.),

Ω^{-1} : Diyagonal beklentilerin güvenilirliği matrisini ($k \times k$) (her bir girdi beklentinin güvenilirliği olup, düşük değerli bir girdi yüksek güvenilirliği ifade eder),

Π : Denge getiri vektörünü (1xn vektör),

Q : Yatırımcının varlıkların tahmini beklenen getirileri hakkındaki her bir beklentinin temsil edildiği vektörü (kx1),

$E(R)$: Black-Litterman nihai beklenen getirileri yani, (1xn) sütun vektörünü ifade eder.

Black-Litterman Modeli'nin nihai varyans matrisi (M) nihai beklenen getiriler denkleminin birinci kısmını oluşturmaktadır. Yeni kovaryans matrisinde yatırımcı beklentilerinden sonuçlanan ilave varyans hesaba katılmaktadır. Black-Litterman Modeli'nin nihai varyans denklemi aşağıdaki gibidir (Idzorek, 2005, s. 6):

$$M = [(\tau\Sigma)^{-1} + (P'\Omega^{-1}P)]^{-1} \quad (2)$$

2. Black-Litterman Modeli'nin Borsa İstanbul Anonim Şirketi 100 Endeksine Uygulanması

2.1. Araştırmanın Veri Seti

Araştırmanın veri seti Borsa İstanbul Anonim Şirketi (BİST) Ulusal 100 endeksinde yer alan şirketlerden sadece 1 Ocak 2004 ile 30 Haziran 2013 tarihleri arasında endekste devamlılık gösteren şirketlerden oluşmaktadır. Çünkü belirlenen endekste listelenen şirketler belirli periyotlarda güncellenmektedir. Dolayısıyla, bu çalışmada belirlenen tarih aralığında BİST Ulusal 100 endeksinde devamlılık gösteren 39 şirket bulunmaktadır. Böylece, belirlenen tarih aralığında hisse senetleri BİST Ulusal 100 endeksinde devamlılık gösteren 39 şirketin hisse senedi getirileri ve piyasa ağırlıkları bu çalışmanın verilerini oluşturmuştur.

2.2. Araştırmanın Yöntemi

Black-Litterman Modeli ile optimal portföy seçimine yeni bir yöntem kazandırılmıştır. İlk olarak portföyde yer alacak varlıklar belirlenir. Daha sonra varlık getirileri ($E(r)$) ve ağırlıkları (w) hesaplanır. Varlık getiri serileri ($E(r)$) tespit edildikten sonra varyans-kovaryans matrisi (Σ) hesaplanır.

İkinci adımda her varlık için denge getirilerinin (Π) hesaplanmasında ters optimizasyon uygulanır. Riskten kaçınma katsayısı (δ) hesaplanır. Riskten kaçınma katsayısı (δ) hesaplandıktan sonra, Black-Litterman Modeli'nin stratejik varlık dağılımı kararları olarak ifade edilen denge getirileri vektörü (Π) elde edilir. Denge getirileri vektörü (Π) riskten kaçınma katsayısı (δ), kovaryans matrisi (Σ) ve tarihsel ağırlıkların (w) çarpımı ile elde edilir.

Sonraki adımda ise Black-Litterman Modeli'nin taktik varlık dağılımı kararları olarak ifade edilen yatırımcı beklenti matrisi (P) oluşturulur. Yatırımcı beklenti matrisi mutlak ve/veya nispi beklentileri içerebilir. Bu beklentiler, bir varlık için ya da birçok varlık için olabilir. Yatırımcı her varlık için beklenti değeri belirtebilir. Yatırımcı beklentileri mutlak veya nispi olmak üzere iki şekilde ifade edilebilir. Yatırımcının, beklenti matrisini oluşturduktan sonra beklentide bulunduğu varlık hakkında tahmini beklenen getiriyi (Q) belirtmesi gerekmektedir. Ayrıca yatırımcı beklentilerin güvenilirlik oranını (c) da belirler. Son olarak, bazı araştırmacılar tarafından kullanılmayan ancak modelde bulunan (τ) parametresi hesaplanır. Böylece, Black-Litterman Modeli'nin yönteminin ikinci adımı olan beklentilerin varyans matrisi (Ω) hesaplanır.

Black-Litterman Modeli'nin son adımı olan yeni birleştirilmiş getiri vektörü ($E(R)$), denge getirileri vektörü (Π) ve yatırımcının beklenen getiri vektörünün (Q) birleştirilmesiyle elde edilir. Elde edilen bu yeni birleştirilmiş getiri vektörü ile yatırımcı yeni optimal portföyünü seçebilmektedir. Böylece, yatırımcı varlıkların tahmini getirileri hakkındaki beklentilerini optimal portföy seçim sürecine dahil edebilmektedir.

2.3. Denge Getirilerinin Hesaplanması

Denge getirileri (Π) Black-Litterman Modeli'nin stratejik varlık dağılımı kararlarını oluşturmaktadır. Yatırımcı beklentileri Black-Litterman Modeli'nin ikinci adımını oluşturur.

Denge getirilerini elde etmek için “ters optimizasyon” yöntemi kullanılır (Idzorek, 2005, s. 3). Ters optimizasyon işlemi için gerekli olan varyans-kovaryans matrisi (Σ), ağırlık vektörü (w) ve riskten kaçınma parametresinin (δ) birbirleriyle çarpımıyla elde edilir. “Ters optimizasyon” denklemi ise aşağıda gösterilmiştir:

$$\Pi = \delta \Sigma w \quad (3)$$

Yukarıdaki denkleme göre denge getirilerinin elde edilmesi için gereken sonuncu parametre, riskten kaçınma parametresidir. Riskten kaçınma parametresi aşağıda gösterilen denklem ile hesaplanmaktadır.

$$\delta = \frac{E(r) - r_f}{\sigma_m^2} \quad (4)$$

Denge getiri vektörü Black-Litterman Modeli’nin ilk adımı olan birincil getirileri içerir. Bu getiriler yatırımcı beklentilerinin belirtilmesi için birincil bilgi niteliğindedir ve denge getirileri vektörü ile aynıdır. Yatırımcıların her bir varlık için herhangi bir beklentiye sahip olması ile bu bilgiler değişime uğrar ve nihai getirilere ulaşılır. Bu yatırımcı beklentilerinin optimal portföy seçimi sürecine dahil edilebilmesi ise Black-Litterman Modeli uygulanarak gerçekleştirilir. Yatırımcının hiçbir beklentisinin olmaması durumunda nihai getiriler yani Black-Litterman getirileri ($E(R)$) ile denge getirileri aynı olur.

2.4. Yatırımcı Beklentilerinin Belirtilmesi

Çoğu araştırmacı tarafından Black-Litterman Modeli’nin en zor adımı olarak bilinen yatırımcı beklentilerinin hesaplanması denge getirileri doğrultusunda koşullu getirilerin oluşturulması ile ilgilidir (Black ve Litterman, 1992, s. 35). Bu adım, Black-Litterman Modeli’nin taktik varlık dağılımı kararları olarak adlandırılır ve böylece yatırımcıların varlıklar ile ilgili getirileri hakkında kısa vadeli beklentilerini ifade etmesi sağlanmaktadır (Idzorek, 2006, s.22). Yatırımcıların beklenti getirileri (Q) tahmini bir bilgi niteliğinde olup içsel, kişisel veya subjektif getiriler olarak da ifade edilir. Yatırımcının beklenen getiri vektörü (Q), yatırımcının portföyde yer alan her bir varlık hakkında tahmini beklenen getirilerini ifade eder (Black ve Litterman, 1992, s.33). Black-Litterman Modeli ile bu beklentiler optimizasyon sürecine dahil edilebilmekte ve nihai getirilere yansıtılabilmektedir.

Yatırımcı beklentilerin belirtilmesinde öncelikle yatırımcı beklenti matrisi oluşturulur çünkü bu matris yatırımcının herhangi bir varlık hakkında beklentisinin var olup olmadığını göstermektedir. Black-Litterman getirileri ($E(R)$) ana denkleminde bu matris P ile ifade edilmiştir ve hatta seçim matrisi olarak da adlandırılmaktadır (Arestad, C.J. ve Rahmqvist, J. , 2012, s.13). P matrisinde her sütun bir varlığı ve her satır bir beklentiye ifade etmektedir (Xu ve diğerleri, 2008, s.3). Beklentilerin ifade edilmesi iki şekilde olmaktadır. Bunlar mutlak ve nispi beklentiler olup, sırasıyla satırların toplamı bir veya sıfıra eşit olmaktadır (He ve Litterman, 1999, s.6).

P matrisi, Black-Litterman Modeli’nin taktik varlık dağılımı kararlarını yani her yatırımcının subjektif beklentilerini matematiksel ve hesaplanabilir bir şekilde ifade edilmesini sağlamaktadır. Her yatırımcının varlıklar hakkında beklentileri kişisel olup, diğer hiçbir yatırımcıyla benzeşmez ya da benzeşmek zorunda değildir. Aynı zamanda bu beklentiler denge getirileri doğrultusunda olabileceği gibi sadece yatırımcının sezgileri ile ilgili de olabilir (Black ve Litterman, 1991, s.13-14).

Yatırımcının beklenen getiri vektörü (Q) yatırımcının sadece tahmini beklenen getiri değerlerini ifade etmektedir. Yatırımcının bir varlık hakkında tahmini beklenen getiri değeri mutlak beklenti olarak değerlendirilir. Ancak nisbi bir beklentiye sahip ise bir varlığın diğer varlıktan daha iyi bir performansa sahip olacağı anlamını taşımaktadır.

Araştırmada portföy kapsamındaki şirketlerin 01/01/2004-30/06/2013 tarihleri arasındaki denge getirileri doğrultusunda üç adet yatırımcı beklentisi oluşturulmuştur:

$$\Omega = \begin{bmatrix} (p_1 \Sigma p_1') & 0 & 0 \\ 0 & (p_2 \Sigma p_2') & 0 \\ 0 & 0 & (p_3 \Sigma p_3') \end{bmatrix}$$

2.6. Nihai Getirilerin Hesaplanması

Black-Litterman Modeli'nin stratejik varlık dağılımı kararlarını ifade eden denge getirileri ile taktik varlık dağılımı kararlarını ifade eden yatırımcı beklentilerinin birleştirilmesi ile yeni nihai getiriler elde edilir. Böylece, optimal portföy seçim sürecine yatırımcı beklentilerinin dahil edilmesini sağlayan Black-Litterman Modeli ile nihai getiriler elde edilerek portföyde yer alan varlıkların ağırlıkları revize edilebilir. Nihai getiriler ($E(R)$), aynı zamanda Black-Litterman getirileri olarak ifade edilebilir. Black-Litterman getirilerinin elde edilmesi daha önce bahsedildiği gibi iki bilginin birleştirilmesi sonucu elde edilir. Bu bilgilerden birincisi denge getirileri (Π) olarak ifade edilen birincil bilgilerdir. Birincil bilgiler doğrultusunda yatırımcı portföy kapsamındaki varlıklardan hepsi veya biri için nispi veya mutlak beklentiler belirtmektedir. Denge getirileri doğrultusunda belirtilen içsel ve kişisel yatırımcı beklentileri literatürde çoğunlukla koşullu bilgiler olarak ifade edilir. Bu iki bilginin birleştirilmesi işlemi literatürde ilk defa Black-Litterman Modeli ile gerçekleştirilmiştir. Black-Litterman getirilerini hesaplamak için kullanılan denklem aşağıda gösterilmiştir. Denklem (6)'da gösterilen tüm girdiler Matlab 8.0 (2012) programı uygulanarak Black-Litterman nihai getirileri elde edilir.

$$E(R) = [(\tau \Sigma)^{-1} + (P' \Omega^{-1} P)]^{-1} [(\tau \Sigma)^{-1} \Pi + P' \Omega^{-1} Q] \quad (6)$$

Nihai getiriler elde edildikten sonra optimal portföy ağırlıklarına ulaşmak için portföy ağırlıkları revize edilmektedir. Yeni Black-Litterman nihai getiriler elde edildikten sonra bu getiri bilgilerine göre portföy içinde yer alan varlıkların yeni ağırlık değerlerini hesaplamak için kullanılan denklem ise aşağıda gösterilmiştir:

$$W_{BL} = (\delta \Sigma)^{-1} E(R) \quad (7)$$

Black-Litterman nihai getirileri ile ağırlıklar revize edilerek, varlıkların yeni ağırlıklarının matematiksel olarak hesaplanabilmesi ise modelin sağlamlığını göstermektedir. Şimdiye kadar yapılmış çalışmalarda hem yatırımcı beklenti getirilerinin optimizasyon sürecine dahil edilebilmesi hem de bu işlem sonucunda elde edilen getiri bilgilerinden yola çıkarak portföy içinde yer alan varlıkların ağırlıklarını revize etmeyi sağlayan kantitatif bir yöntem kullanılmamıştır.

Araştırma bulguları tablo 1'de sunulmuştur. Araştırmada portföy kapsamındaki şirketler hakkında üç adet yatırımcı beklentisi oluşturulmuştur. Bu yatırımcı beklentileri nispi beklentiler niteliğindedir. Araştırmanın sonuç ve bulguları değerlendirilirken tablo 1'de ikinci sütununda Black-Litterman nihai getirileri incelenmiştir. Nispi yatırımcı beklentileri belirtilirken yatırımcının portföyde yer alan varlıklardan birinin diğer varlığa göre getirisinin daha iyi performans göstereceği öngörülmüştü.

Yatırımcının birinci beklentisi incelendiğinde; yatırımcı ABC17 hisse senedi getirilerinin ABC25 hisse senedi getirilerinden % 60 beklenti güvenilirliği ile % 0.10 getiri oranında daha iyi performans göstereceğini öngörmektedir. Buna göre; tablo 1'in ikinci sütununda ABC17 hisse senedi getirileri % 2.54, ABC25 hisse senedi getirileri ise % 2.44 olarak hesaplanmıştır. Sonuç olarak, nispi yatırımcı beklentisine göre ABC17 hisse senedi getirileri, ABC25 hisse senedi getirilerinden % 60 beklenti güvenilirliği ile % 0.10 getiri oranında daha iyi performans göstermiştir.

Tablo1: Getiri Vektörleri ve Portföy Ağırlıkları

HİSSE KODU	Black-Litterman Getirileri E(R) %	Denge Getirileri (II) %	Fark $\Pi - E(R)$ %	Ağırlıklar (w) %	Yeni Ağırlıklar (w _{BL})%
ABC1	1.02	1.03	0.01	4.70	4.70
ABC2	2.33	2.34	0.01	13.23	13.23
ABC3	1.45	1.46	0.01	0.43	0.43
ABC4	1.36	1.37	0.01	0.33	0.33
ABC5	1.47	1.48	0.01	0.40	0.40
ABC6	2.12	2.14	0.02	0.40	0.40
ABC7	2.25	2.27	0.02	1.68	1.68
ABC8	1.61	1.61	0.00	0.29	0.29
ABC9	1.66	1.67	0.01	0.98	0.98
ABC10	1.88	1.89	0.01	1.84	1.84
ABC11	2.58	2.61	0.03	1.17	1.17
ABC12	1.29	1.30	0.01	0.45	0.45
ABC13	1.38	1.38	0.00	0.18	0.18
ABC14	1.40	1.40	0.00	2.18	2.18
ABC15	1.56	1.56	0.00	4.71	4.71
ABC16	1.49	1.50	0.01	1.43	1.43
ABC17	2.54	2.57	0.03	14.75	12.68
ABC18	2.12	2.13	0.01	0.29	0.29
ABC19	2.35	2.37	0.02	0.32	0.32
ABC20	2.52	2.54	0.02	0.88	0.48
ABC21	1.87	1.87	0.00	0.59	0.59
ABC22	2.23	2.24	0.01	10.82	10.82
ABC23	2.24	2.26	0.02	0.18	0.18
ABC24	1.83	1.83	0.00	0.64	0.64
ABC25	2.44	2.44	0.00	3.92	5.99
ABC26	1.94	1.94	0.00	0.62	0.62
ABC27	0.88	0.89	0.01	0.33	0.33
ABC28	1.07	1.08	0.01	0.13	0.13
ABC29	1.55	1.56	0.01	0.88	0.88
ABC30	1.86	1.87	0.01	0.24	0.24
ABC31	2.46	2.47	0.01	6.18	6.18
ABC32	2.03	2.03	0.00	1.59	2.63
ABC33	1.25	1.25	0.00	8.12	8.12
ABC34	1.77	1.78	0.01	1.73	1.73
ABC35	2.33	2.36	0.03	1.09	0.05
ABC36	1.79	1.79	0.00	0.74	0.74
ABC37	1.37	1.38	0.01	5.95	6.35
ABC38	1.92	1.93	0.01	0.81	0.81
ABC39	2.27	2.28	0.01	4.81	4.81
				100.00	100.00

Yatırımcının ikinci beklentisi incelendiğinde; yatırımcı ABC20 hisse senedi getirilerinin ABC37 hisse senedi getirilerinden % 65 beklenti güvenilirliği ile % 1.15 getiri oranında daha iyi performans göstereceğini öngörmektedir. Buna göre; tablo 1'in ikinci sütununda ABC20 hisse senedi getirileri % 2.52, ABC37 hisse senedi getirileri ise % 1.37 olarak hesaplanmıştır. Sonuç olarak, nispi yatırımcı beklentisine göre ABC20 hisse senedi getirileri, ABC37 hisse senedi getirilerinden % 65 beklenti güvenilirliği ile % 1.15 getiri oranında daha iyi performans göstermiştir.

Yatırımcının üçüncü beklentisi incelendiğinde; yatırımcı ABC35 hisse senedi getirilerinin ABC32 hisse senedi getirilerinden % 55 beklenti güvenilirliği ile % 0.30 getiri oranında daha iyi performans göstereceğini öngörmektedir. Buna göre; tablo 1'in ikinci sütununda ABC35 hisse senedi getirileri % 2.33, ABC32 hisse senedi getirileri ise % 2.03 olarak hesaplanmıştır. Sonuç olarak, nispi yatırımcı beklentisine göre ABC35 hisse senedi getirileri ABC32 hisse senedi getirilerinden % 55 beklenti güvenilirliği ile % 0.30 getiri oranında daha iyi performans göstermiştir.

Tablo 1'in üçüncü sütununda ise Black-Litterman Modeli'nin birinci adımı olan denge getirileri verilmiştir. Tablo 1'de dördüncü sütun incelendiğinde ise yatırımcı beklentilerinin portföyde yer alan 39 varlıktan sadece 6 varlık hakkında olmasına rağmen, portföy kapsamındaki çoğu varlığın nihai getirisi denge getirisinden farklı ($\Pi-E(R)$) olmuştur. Tablo 1'in dördüncü sütununda bu fark sunulmuştur. Tek bir yatırımcı beklentisi bile portföy kapsamındaki diğer varlıkların nihai getirilerinin denge getirilerinden farklı olmasına sebep olmaktadır çünkü her bir getiri, Black-Litterman nihai getiriler denkleminde bulunan getirilerin kovaryans matrisi (Σ) aracılığıyla diğer getirilere bağlıdır.

Tablo 1'de altıncı sütunda gösterilen yeni ağırlık vektörü (w_{BL}) Black-Litterman getirileri vektörünün ($E(R)$) denklem (7)'ye yerleştirilmesiyle hesaplanır. Black-Litterman Modeli'nin en güçlü yönlerinden biri bu sütununda ifade edilir, çünkü model portföy ağırlıklarını yatırımcı beklentileri doğrultusunda revize ederek portföyün toplam ağırlıklarına yansıtılabilmektedir. Portföy kapsamındaki varlıklardan yatırımcının beklenti belirttiği sadece altı varlığın ağırlığı orijinal ağırlıklarından farklı olmuştur. Tablo 1'in beşinci sütununda ise portföyde yer alan varlıklara ait piyasa ağırlıkları (w) bulunmaktadır. Yatırımcı beklentilerinin belirtildiği sadece altı varlığın ağırlıkları portföy kapsamında değişikliğe uğramıştır. Bu şirketler: ABC17, ABC25, ABC20, ABC37, ABC35 ve ABC32'dir. Portföy kapsamındaki herhangi bir yatırımcı beklentisi belirtilmemiş şirketlerin ağırlıkları ise değişmemiştir.

3. Beklentilerin %100 Güvenilirlik Oranında Nihai Getirilerin Hesaplanması

Black-Litterman Modeli'nin en önemli özelliği yatırımcının portföyde yer alan bazı varlıklar hakkında tahmini beklenen getiri değerlerini ifade eden beklentilerin optimal portföy seçimine dahil edebilmesini sağlamasıdır. Yatırımcı bir beklenti belirttiğinde her bir beklenti için % 0 ile % 100 arasında olan içsel güvenilirlik oranı (c) belirler. Yatırımcı tahmini beklenen getiri değeri için elbette % 100 kesinliğe de sahip olabilir. Yatırımcı tahmini beklenen getiri hakkında % 100 kesin olmadığında ise bu beklentilerin varyans değerlerine ihtiyaç duyulur. Bu durumda, Black-Litterman Modeli'nin ana denkleminde bulunan beklentilerin varyans matrisi (Ω) kullanılır. Ancak, yatırımcı tahmini beklenen getiri değerine % 100 güvenilirlik oranı belirlerse bu durumda beklentilerin belirsizliği ortadan kalkmış olur. Böylece, yatırımcı % 100 güvenilirlik oranı belirlediğinde Black-Litterman Modeli'nin ana denkleminde kullanılan beklentilerin varyansı matrisi (Ω) yeni nihai getirilerin hesaplanmasında kullanılmaz. Yatırımcı bütün beklentilerine % 100 güvenilirlik oranı belirlediğinde yeni birleştirilmiş getiri vektörünün Black-Litterman denklemi değişiklik gösterir:

$$E(R_{\%100}) = \Pi + \tau \Sigma P' (P \tau \Sigma P')^{-1} (Q - P \Pi) \quad (8)$$

Burada, $E(R_{\%100})$ Black-Litterman nihai getirilerinin % 100 güvenilirlik oranında beklenen getiri vektörünü ifade eder. Nihai getiriler elde edildikten sonra portföy ağırlıklarını revize edebilmek için yeni Black-Litterman ağırlıklarını hesaplamak için kullanılan dekleme ise aşağıda gösterilmiştir:

$$w_{\%100} = (\delta \Sigma)^{-1} E(R_{\%100}) \quad (9)$$

Daha önce beklentilerin varyans matrisi (Ω) kullanılarak elde edilen yeni birleştirilmiş getiri vektörü ($E(R)$) ve ağırlık vektörü (w_{BL}) hesaplanmıştır. Bu bağlamda, farklı beklenti güvenilirlik oranları (c) ile yatırımcı farklı beklenti varyansları elde ederek yeni birleştirilmiş getiri vektörünü hesaplayabilir ve böylece yeni portföy ağırlıklarına ulaşabilir.

4. Yatırımcı Beklentilerinin İncelenmesi

Araştırmada öncelikle yatırımcı beklentileri belirtilmiş ve bu beklentilere güvenilirlik oranları belirlenmiştir. Daha sonra Black-Litterman Modeli uygulanarak nihai getiriler hesaplanmış ve böylece portföy ağırlıkları revize edilmiştir. Bu analizlerden sonra, yatırımcının tek bir beklentisinin ve bu beklentiye yatırımcı tarafından belirlenen güvenilirlik oranı (c) dikkate alınarak nihai getirilerin hesaplanması ve bu getiriler doğrultusunda portföy ağırlıklarının revize edilmesi için farklı bir denklem uygulanmaktadır. Tek bir yatırımcı beklentisinin ve bu beklentinin yatırımcı tarafından belirlenen güvenilirlik oranı dikkate alınarak Black-Litterman nihai getirileri vektörünü elde etmek için aşağıdaki denklem uygulanır:

$$E(R_k) = [(\tau \Sigma)^{-1} + (P_k' \Omega_k^{-1} P_k)]^{-1} [(\tau \Sigma)^{-1} \Pi + P_k' \Omega_k^{-1} Q_k] \quad (10)$$

Burada,

$E(R_k)$: k 'ninci beklentinin ($n \times 1$ sütun vektörü) güvenilirlik oranına göre nihai getiri vektörünü,

P_k : k 'ninci beklentide yer alan varlıkları tanımlayan $1 \times n$ satır vektörünü,

Ω_k : k 'ninci beklentinin varyansını,

Q_k : k 'ninci beklentiye (1×1) ifade eder.

Tek bir yatırımcı beklentisine göre ve bu beklentinin yatırımcı tarafından belirlenen güvenilirlik oranını dikkate alarak elde edilen nihai getiriler ile portföy ağırlıklarını revize etmek için kullanılan denklem aşağıda gösterilmiştir:

$$W_{BL,k} = (\delta \Sigma)^{-1} E(R_k) \quad (11)$$

$W_{BL,k}$: k 'ninci beklentiye göre revize edilen ağırlık vektörünü ifade eder.

Black-Litterman Modeli'nin en önemli özelliği yatırımcı beklentilerinin optimal portföy seçimine dahil edilebilmesidir. Yatırımcı bir beklenti belirttiğinde bu beklenti için içsel % 0 ile % 100 arasında bir güvenilirlik oranı (c) belirler. Yukarıdaki denklemlerde yatırımcının beklenti için belirttiği güvenilirlik oranı dikkate alınarak Black-Litterman Modeli uygulanmıştır. Ancak yatırımcı beklenti için % 100 güvenilirlik oranı yani kesinlik belirttiğinde ise nihai getiriler vektörünü elde etmek için uygulanan Black-Litterman denklemi ise aşağıda gösterilmiştir:

$$E(R_{k,\%100}) = \Pi + \tau \Sigma P_k' (P_k \tau \Sigma P_k')^{-1} (Q_k - P_k \Pi) \quad (12)$$

Burada,

$E(R_{k,\%100})$: k 'ninci beklentinin ($n \times 1$ sütun vektörü) % 100 güvenilirlik oranına göre beklenen getiri vektörünü,

P_k : k 'ninci beklentide yer alan varlıkları tanımlayan $1 \times n$ satır vektörünü,

Q_k : k 'ninci beklentiye (1×1) ifade eder.

Bu denklem ile tek bir yatırımcı beklentisinin ele alındığı ve % 100 güvenilirlik oranına göre elde edilen nihai getiriler ile portföy ağırlıklarının revize edilmesi sağlanmaktadır. Yeni ağırlıkları hesaplamak için kullanılan denklem ise aşağıda gösterilmiştir:

$$w_{k,\%100} = (\delta \Sigma)^{-1} E(R_{k,\%100}) \quad (13)$$

$w_{k,\%100}$: k'nıncı beklentinin % 100 güvenilirlik oranına göre revize edilen ağırlık vektörünü ifade eder.

Her bir yatırımcı beklentisinin hem yatırımcı tarafından belirlenen güvenilirlik oranına hem de % 100 güvenilirlik oranına göre nihai getirileri ve ağırlıkları ayrı ayrı incelenmiştir.

4.1. Yatırımcı Beklentisi Birin İncelenmesi

Araştırmada yatırımcı birinci beklentisinde ABC17 hisse senedi getirilerinin ABC25 hisse senedi getirilerinden % 60 beklenti güvenilirliği ile % 0.10 getiri oranında daha iyi performans göstereceğini öngörmektedir. Sadece yatırımcı beklentisi bire göre Black-Litterman Modeli'ni uygulayarak elde edilen sonuçlar tablo 2'te sunulmuştur. Sadece yatırımcı beklentisi birin değerlendirilmesinde beklentinin yatırımcı tarafından belirlenen güvenilirlik oranı dikkate alınarak elde edilen nihai getiriler tablonun ikinci sütununda gösterilmiştir. Daha sonra bu nihai getiriler doğrultusunda ağırlıklar revize edilmiştir ve bunlar da tablonun üçüncü sütununda gösterilmiştir. Ayrıca sadece yatırımcı beklentisi birin kesinlik yani % 100 güvenilirlik oranına göre nihai getirileri hesaplanmıştır ve tablonun dördüncü sütununda gösterilmiştir. Böylece, portföy ağırlıkları yatırımcı beklentisinin kesinliği durumunda yeniden revize edilmiş ve tablonun beşinci sütununda gösterilmiştir.

Tablo 2'nin ikinci sütununda ABC17 hisse senedi getirileri % 2.55, ABC25 hisse senedi getirileri ise % 2.45 olarak hesaplanmıştır. Sonuç olarak, nispi yatırımcı beklentisine göre ABC17 hisse senedi getirileri ABC25 hisse senedi getirilerinden % 60 beklenti güvenilirliği ile % 0.10 getiri oranında daha iyi performans göstermiştir. Tablo 2'nin dördüncü sütununda ise yatırımcı beklentisi birin % 100 güvenilirlik oranına göre nihai getirileri sunulmuştur. % 100 güvenilirlik oranında ABC17 hisse senedi getirileri % 2.57, ABC25 hisse senedi getirileri ise % 2.44 olarak bulunmuştur.

Sonuç olarak, yatırımcı beklentisi birin % 100 güvenilirlik oranında yani kesinlik durumunda nispi beklenti olarak öngörülen % 0.10 getiri oranından daha iyi performans göstermiştir. Bu durumda, % 100 güvenilirlik oranında ABC17 hisse senedi getirileri, ABC25 hisse senedi getirilerinden % 0.13 getiri oranında daha iyi performans göstermiştir.

Tablo 2. Sadece Yatırımcı Beklentisi 1'in Black-Litterman Getirilerine ve Ağırlıklara Olan Etkisi

HİSSE KODU	E(R) %	w _{BL} (%)	E(R) ^{%100} (%)	w ^{%100} (%)	w (%)	Güvenilirlik Oranı (%)
ABC1	1.03	4.70	1.03	4.77	4.70	0.00
ABC2	2.34	13.23	2.34	13.24	13.23	0.00
ABC3	1.46	0.43	1.46	0.47	0.43	0.00
ABC4	1.36	0.33	1.37	0.35	0.33	0.00
ABC5	1.48	0.40	1.48	0.41	0.40	0.00
ABC6	2.13	0.40	2.14	0.38	0.40	0.00
ABC7	2.27	1.68	2.27	1.69	1.68	0.00
ABC8	1.61	0.29	1.62	0.30	0.29	0.00
ABC9	1.67	0.98	1.67	0.96	0.98	0.00
ABC10	1.89	1.84	1.89	1.88	1.84	0.00
ABC11	2.60	1.17	2.61	1.18	1.17	0.00
ABC12	1.30	0.45	1.30	0.46	0.45	0.00
ABC13	1.38	0.18	1.39	0.19	0.18	0.00
ABC14	1.40	2.18	1.40	2.17	2.18	0.00
ABC15	1.56	4.71	1.56	4.74	4.71	0.00
ABC16	1.50	1.43	1.50	1.51	1.43	0.00
ABC17	2.55	12.73	2.57	14.69	14.75	60
ABC18	2.13	0.29	2.13	0.31	0.29	0.00
ABC19	2.37	0.32	2.37	0.28	0.32	0.00
ABC20	2.54	0.88	2.54	0.82	0.88	0.00
ABC21	1.88	0.59	1.88	0.58	0.59	0.00
ABC22	2.24	10.82	2.24	10.85	10.82	0.00
ABC23	2.25	0.18	2.26	0.16	0.18	0.00
ABC24	1.84	0.64	1.83	0.67	0.64	0.00
ABC25	2.45	5.94	2.44	3.83	3.92	60
ABC26	1.94	0.62	1.94	0.59	0.62	0.00
ABC27	0.90	0.33	0.90	0.34	0.33	0.00
ABC28	1.07	0.13	1.08	0.17	0.13	0.00
ABC29	1.55	0.88	1.56	0.89	0.88	0.00
ABC30	1.87	0.24	1.87	0.23	0.24	0.00
ABC31	2.47	6.18	2.47	6.23	6.18	0.00
ABC32	2.03	1.59	2.03	1.61	1.59	0.00
ABC33	1.25	8.12	1.26	8.15	8.12	0.00
ABC34	1.78	1.73	1.78	1.74	1.73	0.00
ABC35	2.36	1.09	2.36	1.03	1.09	0.00
ABC36	1.79	0.74	1.79	0.71	0.74	0.00
ABC37	1.37	5.95	1.38	6.03	5.95	0.00
ABC38	1.93	0.81	1.93	0.79	0.81	0.00
ABC39	2.28	4.81	2.28	4.83	4.81	0.00
		100.00		100.27	100.00	0.00

4.2. Yatırımcı Beklentisi İkinci İncelenmesi

Araştırmada yatırımcı ikinci beklentisinde ABC20 hisse senedi getirilerinin ABC37 hisse senedi getirilerinden % 65 beklenti güvenilirliği ile % 1.15 getiri oranında daha iyi performans göstereceğini öngörmektedir. Sadece bu beklentiye göre Black-Litterman Modeli'ni uygulayarak elde edilen sonuçlar tablo 3'te sunulmuştur. Sadece yatırımcı beklentisi ikinin değerlendirilmesinde beklentinin yatırımcı tarafından belirlenen güvenilirlik oranı dikkate alınarak elde edilen nihai getiriler tablonun ikinci sütununda gösterilmiştir. Daha sonra bu nihai getiriler doğrultusunda ağırlıklar revize edilmiştir ve bunlar da tablonun üçüncü sütununda gösterilmiştir. Ayrıca sadece yatırımcı beklentisi ikinin kesinlik yani %100 güvenilirlik oranına göre nihai getirileri hesaplanmıştır ve tablonun dördüncü sütununda gösterilmiştir. Böylece, portföy ağırlıkları yatırımcı beklentisinin kesinliği durumunda yeniden revize edilmiş ve tablonun beşinci sütununda gösterilmiştir.

Tablo 3'ün ikinci sütununda ABC20 hisse senedi getirileri % 2.53, ABC37 hisse senedi getirileri ise % 1.38 olarak hesaplanmıştır. Sonuç olarak, nispi yatırımcı beklentisine göre ABC20 hisse senedi getirileri ABC37 hisse senedi getirilerinden % 65 beklenti güvenilirliği ile % 1.15 getiri oranında daha iyi performans göstermiştir. Tablo 3'ün dördüncü sütununda ise yatırımcı beklentisi ikinin %100 güvenilirlik oranına göre nihai getirileri sunulmuştur. Bu sütunda ise ABC20 hisse senedi getirileri % 2.54, ABC37 hisse senedi getirilerinin ise % 1.37 olarak bulunmuştur.

Sonuç olarak, yatırımcı beklentisi ikinin % 100 güvenilirlik oranında yani kesinlik durumunda nispi beklenti olarak öngörülen % 1.15 getiri oranından daha iyi performans göstermiştir. Bu durumda, % 100 güvenilirlik oranında ABC20 hisse senedi getirileri, ABC37 hisse senedi getirilerinden % 1.17 getiri oranında daha iyi performans göstermiştir.

Tablo 3. Sadece Yatırımcı Beklentisi 2'in Black-Litterman Getirilerine ve Ağırlıklara Olan Etkisi

HİSSE KODU	E(R) %	w _{BL} (%)	E(R) ^{%100} (%)	w ^{%100} (%)	w (%)	Güvenilirlik Oranı (%)
ABC1	1.02	4.70	1.02	4.60	4.70	0.00
ABC2	2.34	13.23	2.34	13.21	13.23	0.00
ABC3	1.45	0.43	1.46	0.38	0.43	0.00
ABC4	1.36	0.33	1.36	0.29	0.33	0.00
ABC5	1.48	0.40	1.48	0.39	0.40	0.00
ABC6	2.13	0.40	2.13	0.42	0.40	0.00
ABC7	2.27	1.68	2.27	1.66	1.68	0.00
ABC8	1.61	0.29	1.61	0.28	0.29	0.00
ABC9	1.67	0.98	1.67	1.01	0.98	0.00
ABC10	1.88	1.84	1.89	1.77	1.84	0.00
ABC11	2.59	1.17	2.60	1.17	1.17	0.00
ABC12	1.30	0.45	1.30	0.44	0.45	0.00
ABC13	1.38	0.18	1.38	0.17	0.18	0.00
ABC14	1.40	2.18	1.40	2.18	2.18	0.00
ABC15	1.56	4.71	1.56	4.67	4.71	0.00
ABC16	1.49	1.43	1.50	1.34	1.43	0.00
ABC17	2.57	14.75	2.57	14.83	14.75	0.00
ABC18	2.13	0.29	2.13	0.26	0.29	0.00
ABC19	2.37	0.32	2.37	0.37	0.32	0.00
ABC20	2.53	0.49	2.54	0.96	0.88	0.00
ABC21	1.87	0.59	1.87	0.60	0.59	65
ABC22	2.24	10.82	2.24	10.77	10.82	0.00
ABC23	2.26	0.18	2.26	0.20	0.18	0.00
ABC24	1.83	0.64	1.83	0.60	0.64	0.00
ABC25	2.43	3.92	2.44	4.04	3.92	0.00
ABC26	1.93	0.62	1.94	0.65	0.62	0.00
ABC27	0.89	0.33	0.89	0.31	0.33	0.00
ABC28	1.08	0.13	1.08	0.08	0.13	0.00
ABC29	1.55	0.88	1.55	0.86	0.88	0.00
ABC30	1.87	0.24	1.87	0.26	0.24	0.00
ABC31	2.46	6.18	2.47	6.11	6.18	0.00
ABC32	2.02	1.59	2.03	1.58	1.59	0.00
ABC33	1.25	8.12	1.25	8.08	8.12	0.00
ABC34	1.77	1.73	1.78	1.71	1.73	0.00
ABC35	2.35	1.09	2.36	1.16	1.09	0.00
ABC36	1.79	0.74	1.79	0.79	0.74	0.00
ABC37	1.38	6.34	1.37	5.85	5.95	65
ABC38	1.93	0.81	1.93	0.82	0.81	0.00
ABC39	2.28	4.81	2.28	4.80	4.81	0.00
		100.00		99.65	100.00	0.00

4.3. Yatırımcı Beklentisi Üçün İncelenmesi

Araştırmada yatırımcı üçüncü beklentisinde ABC35 hisse senedi getirilerinin ABC32 hisse senedi getirilerinden % 55 beklenti güvenilirliği ile % 0.30 getiri oranında daha iyi performans göstereceğini öngörmektedir. Sadece bu beklentiye göre Black-Litterman Modeli'ni uygulayarak elde edilen sonuçlar tablo 4'te sunulmuştur. Sadece yatırımcı beklentisi üçün değerlendirilmesinde beklentinin yatırımcı tarafından belirlenen güvenilirlik oranı dikkate alınarak elde edilen nihai getiriler tablonun ikinci sütununda gösterilmiştir. Daha sonra bu nihai getiriler doğrultusunda ağırlıklar revize edilmiştir ve bunlar da tablonun üçüncü sütununda gösterilmiştir. Ayrıca sadece yatırımcı beklentisi üçün kesinlik yani % 100 güvenilirlik oranına göre nihai getirileri hesaplanmıştır ve tablonun dördüncü sütununda gösterilmiştir. Böylece, portföy ağırlıkları yatırımcı beklentisinin kesinliği durumunda yeniden revize edilmiş ve tablonun beşinci sütununda gösterilmiştir.

Tablo 4'ün ikinci sütununda ABC35 hisse senedi getirileri % 2.37, SISE hisse kodu ile gösterilen ABC32 hisse senedi getirileri ise % 2.03 olarak hesaplanmıştır. Sonuç olarak, nispi yatırımcı beklentisine göre ABC35 hisse senedi getirileri ABC32 hisse senedi getirilerinden % 55 beklenti güvenilirliği ile % 0.34 getiri oranında daha iyi performans göstermiştir. Tablo 4'ün dördüncü sütununda ise yatırımcı beklentisi üçün % 100 güvenilirlik oranına göre nihai getirileri sunulmuştur. Bu sütunda ise ABC35 hisse senedi getirileri % 2.36, ABC32 hisse senedi getirilerinin ise % 2.03 olarak bulunmuştur.

Sonuç olarak, yatırımcı beklentisi birin % 100 güvenilirlik oranında yani kesinlik durumunda nispi beklenti olarak öngörülen % 0.30 getiri oranından daha iyi performans göstermiştir. Bu durumda, % 100 güvenilirlik oranında ABC35 hisse senedi getirileri, ABC32 hisse senedi getirilerinden % 0.33 getiri oranında daha iyi performans göstermiştir.

Tablo 4. Sadece Yatırımcı Beklentisi 3'ün Black-Litterman Getirilerine ve Ağırlıklara Olan Etkisi

HİSSE KODU	E(R) %	w _{BL} (%)	E(R) ^{%100} (%)	w ^{%100} (%)	w (%)	Güvenilirlik Oranı (%)
ABC1	1.03	4.70	1.03	4.83	4.70	0.00
ABC2	2.34	13.23	2.35	13.25	13.23	0.00
ABC3	1.46	0.43	1.46	0.51	0.43	0.00
ABC4	1.37	0.33	1.37	0.37	0.33	0.00
ABC5	1.48	0.40	1.48	0.42	0.40	0.00
ABC6	2.14	0.40	2.14	0.37	0.40	0.00
ABC7	2.28	1.68	2.27	1.71	1.68	0.00
ABC8	1.62	0.29	1.62	0.30	0.29	0.00
ABC9	1.67	0.98	1.67	0.94	0.98	0.00
ABC10	1.89	1.84	1.89	1.92	1.84	0.00
ABC11	2.61	1.17	2.61	1.19	1.17	0.00
ABC12	1.31	0.45	1.30	0.47	0.45	0.00
ABC13	1.39	0.18	1.39	0.20	0.18	0.00
ABC14	1.40	2.18	1.40	2.17	2.18	0.00
ABC15	1.56	4.71	1.56	4.77	4.71	0.00
ABC16	1.50	1.43	1.50	1.57	1.43	0.00
ABC17	2.57	14.75	2.57	14.64	14.75	0.00
ABC18	2.13	0.29	2.13	0.33	0.29	0.00
ABC19	2.37	0.32	2.37	0.25	0.32	0.00
ABC20	2.55	0.88	2.54	0.77	0.88	0.00
ABC21	1.88	0.59	1.88	0.58	0.59	0.00
ABC22	2.24	10.82	2.24	10.88	10.82	0.00
ABC23	2.26	0.18	2.26	0.15	0.18	0.00
ABC24	1.83	0.64	1.84	0.70	0.64	0.00
ABC25	2.44	3.92	2.44	3.75	3.92	0.00
ABC26	1.94	0.62	1.94	0.57	0.62	0.00
ABC27	0.90	0.33	0.90	0.35	0.33	0.00
ABC28	1.08	0.13	1.08	0.20	0.13	0.00
ABC29	1.56	0.88	1.56	0.89	0.88	0.00
ABC30	1.87	0.24	1.87	0.22	0.24	0.00
ABC31	2.47	6.18	2.47	6.27	6.18	0.00
ABC32	2.03	1.59	2.03	1.62	1.59	55
ABC33	1.25	8.12	1.26	8.18	8.12	0.00
ABC34	1.78	1.73	1.78	1.76	1.73	0.00
ABC35	2.37	1.57	2.36	0.99	1.09	55
ABC36	1.79	0.74	1.79	0.68	0.74	0.00
ABC37	1.38	5.95	1.38	6.10	5.95	0.00
ABC38	1.94	0.81	1.93	0.78	0.81	0.00
ABC39	2.27	4.33	2.28	4.84	4.81	0.00
		100.00		100.49	100.00	0.00

SONUÇ

Bu araştırmada, nihai getirilerin oluşturması için yatırımcıların subjektif tahmini beklenti getirileri ile denge getirilerinin birleştirilmesini sağlayan Black-Litterman Modeli için gerekli girdilerin geliştirme süreci ayrıntıları ile açıklanmıştır. Bu araştırma, BIST Ulusal 100 endeksinde Black-Litterman Modeli'nin uygulandığı ilk çalışmadır. Literatürde Black-Litterman Modeli uygulanarak elde edilmiş diğer çalışmalarla karşılaştırmalı olarak incelendiğinde, bu modelin bulguları ve sonuçları değerlendirildiğinde yatırımcı beklenti matrisinin optimal portföy seçimi sürecindeki belirleyici etkisi aynı şekilde gerçekleşmiştir. İlk olarak yatırımcı beklenti matrisi güvenilirlik oranı ile formülize edilmiştir. Bu bulgular ve sonuçlar literatürde yapılmış çalışmalarda Black-Litterman ana denkleminde belirtildiği şekilde hesaplanmıştır. Yeni elde edilmiş olan birleştirilmiş nihai getiriler ile daha iyi çeşitlendirilmiş optimal portföyün elde edilmesi sağlanmıştır. Bu bakımdan literatürde Black-Litterman Modeli kullanılarak elde edilmiş portföyler ile daha sağlam ve iyi çeşitlendirilmiş portföyler elde edildiği sonucu doğrulanmıştır.

Bu araştırmada, Black-Litterman Modeli uygulanarak yatırımcı beklentilerini en iyi yansıtan optimal portföy seçimi amaçlanmıştır. Araştırmada Black-Litterman Modeli'nin ana denkleminde bulunan tüm parametrelerin oluşturulma süreci incelenerek, yatırımcı beklentileri optimal portföy seçimi çerçevesinde değerlendirilmiştir. Araştırmanın veri setini 01/01/2004-30/06/2013 tarihleri arasında BIST Ulusal 100 endeksinde listelenen ve belirlenen tarih aralığında devamlılık gösteren 39 şirket oluşturmaktadır. Araştırmanın bulguları değerlendirildiğinde, Black-Litterman Modeli uygulanarak elde edilen denge getirileri ve piyasa ağırlıkları ile oluşturulan yatırımcı tahmini beklenen getirileri belirlenmiştir. Daha sonra Black-Litterman Modeli uygulanarak nihai getiriler hesaplanmış ve böylece portföy ağırlıkları revize edilmiştir.

Araştırmada belirtilen yatırımcı beklentilerinin %100 güvenilirlik oranına göre optimal portföyün seçiminin sağlanması amacıyla beklentilerin varyans matrisinin bulunmadığı (Ω) Black-Litterman Modeli'nin farklı bir denklemi uygulanarak yeni nihai getiriler hesaplanmış ve bu getiriler doğrultusunda portföy ağırlıkları revize edilmiştir. Araştırmada üç adet yatırımcı beklentisi belirtilmiştir ve bu beklentilerin her birinin ayrı ayrı değerlendirilmesi yapılmıştır. Bu beklentilerden sadece bir adet yatırımcı beklentisi ve güvenilirlik oranı dikkate alındığında modelin farklı bir denklemi ile bu tek bir beklentinin optimal portföy seçimi sürecinde nihai getirilere ve ağırlıklara olan etkileri de incelenmiştir. Tek bir yatırımcı beklentisinin ve bu beklentinin yatırımcı tarafından belirlenen güvenilirlik oranı dikkate alınarak Black-Litterman nihai getirileri elde edilerek, modelin portföy ağırlıklarına olan etkisinin önemi vurgulanmıştır. Sonuç olarak, çalışmada yapılan analizler Black-Litterman Modeli optimal portföy seçimi sürecinde yatırımcı beklentilerinin kantitatif olarak sürece dahil edilmesini sağlayan çok önemli bir model olduğunu kanıtlamıştır.

KAYNAKÇA

- ARESTAD, C.J. ve RAHMQVİST, J. (2012). Applying the Black-Litterman Model on the Swedish Stock Market. Master Thesis. Lund: Lund University School of Economics and Management. <http://www.lunduniversity.lu.se/o.o.i.s?id=24965&postid=2733863>. (05.09.2013).
- BEACH, S.L. ve ORLOV, A.G. (2007). An Application of the Black-Litterman Model with EGARCH-M-Derived Views for International Portfolio Management. *Financial Markets Portfolio Management*. 21 (2): 147-166.

- BEVAN, A. ve WINKELMANN, K. (1998). Using the Black-Litterman Global Asset Allocation Model: Three Years of Practical Experience. Global Fixed Income Portfolio Strategy: Fixed Income Research. June. Goldman, Sachs & Co. http://www.researchgate.net/publication/2624482_Using_the_Black-Litterman_Global_Asset_Allocation_Model_Three_Years_of_Practical_Experience. (05.09.2011).
- BLACK, F. (1989). Universal Hedging: How to Optimize Currency Risk and Reward in International Equity Portfolios. Financial Analyst Journal. 45 (4): 161-167.
- BLACK, F. ve LITTERMAN, R.(1991). Global Asset Allocation With Equities, Bonds, and Currencies. Fixed Income Research. Goldman, Sachs & Co. https://faculty.fuqua.duke.edu/~charvey/Teaching/BA453_2006/Black_Litterman_GAA_1991.pdf. (05.09.2011).
- BLACK, F. ve LITTERMAN, R.(1992). Global Portfolio Optimization. Financial Analysts Journal. 48 (5): 28-43.
- BRAGA, M. D. ve NATALE, F.P. (2007). TEV Sensitivity to Views in Black - Litterman Model. 20th Australasian Finance & Banking Conference. September. 1-16. http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?Abstract_id=1009635. (08.10.2011).
- CHEUNG, W. (2009). Transparent Augmented Black-Litterman Allocation: Simple and Unified Framework for Strategy Combination, Factor Mimicking, Hedging, and Stock-Specific Alphas. 12/ 2009. DOI: 10.2139/ ssrn.1347663: 1-34. http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1347663. (08.10.2011).
- CHEUNG, W. (2011). The Augmented Black-Litterman Model: A Ranking-Free Approach to Factor-Based Portfolio Construction and Beyond. Quantitative Finance. 13 (2): 301-316.
- CHRISTODOULAKIS, G. A. (2002). Bayesian Optimal Portfolio Selection: The Black-Litterman Approach. Notes for Quantitative Asset Pricing MSc Mathematical Trading and Finance. 2002: 1-11. http://www.globalriskguard.com/resources/assetman/bayes_0008.pdf. (20.11.2011).
- DA, Z. ve JAGNANNATHAN, R. (2005). Teaching Note on Black-Litterman Model: 1-16. [www.nd.edu/~zda/TeachingNote_Black - Litterman.pdf](http://www.nd.edu/~zda/TeachingNote_Black_-_Litterman.pdf). (20.11.2011).
- DROBETZ, W. (2001). How to Avoid the Pitfalls in Portfolio Optimization? Putting The Black-Litterman Approach at Work. Swiss Society for Financial Market Research. Financial Markets and Portfolio Management. 15 (1): 59-75.
- GOFMAN, M. ve MANELA, A.(2010). An Empirical Evaluation of the Black-Litterman Approach to Portfolio Choice. Capital Markets: Asset Pricing & Valuation eJournal. 03(2011). DOI:10.2139/ssrn.1782033. http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1782033. (19.11.2012).
- FUSAI, G. ve MEUCCI, A. (2003). Assessing Views. Risk Magazine. 16 (3): 18-21.
- HE, G. ve LITTERMAN, R. (1999). The Intuition Behind Black-Litterman Model Portfolios. Investment Management Research. Goldman Sachs Investment Management Series. 1-20. <http://www.som.yale.edu/Faculty/zc25/Investments/GS-ModelIntuition.pdf>. (23.10.2011).
- HEROLD, U. (2003). Portfolio Construction with Qualitative Forecasts. The Journal of Portfolio Management. 30 (1): 61-72.
- IDZOREK, T. M. (2005). A Step-by-Step Guide to the Black-Litterman Model: Incorporating User-Specified Confidence Level. Zephyr Associates Inc. 1-34. <http://www.indiceperu.com/lecturas/paper13.pdf>. (23.10.2011).

- IDZOREK, T. M. (2006). Developing Robust Asset Allocations. Ibbotson Associates. 1-27. [http://corporate.morningstar.com/ib/documents/Methodology Documents/ Research Papers/RobustAssetAllocation.pdf](http://corporate.morningstar.com/ib/documents/Methodology_Documents/Research_Papers/RobustAssetAllocation.pdf). (23.10.2011).
- KARAKOÇ, İ.D. (2010). Matlab ve İstatistiksel Veri Analizi. Nobel Yayın Dağıtım. İstanbul.
- KRISHNAN, H. ve MAINS, N.(2005). The Two Factor Black-Litterman Model. Investment Management: 69-73. http://www.risk.net/data/risk/pdf/technical/risk_0705_technical_krishnan.pdf. (15.03.2012).
- MANKERT, C. (2006). The Black-Litterman Model: Mathematical and Behavioral Finance Approaches Towards Its Use in Practice. Licentiate Thesis. Stockholm. Sweden: KTH Royal Institute of Technology. <http://kth.diva-portal.org/smash/get/diva2:10311/FULLTEXT01.pdf>. (15.03.2012).
- MARKOWITZ, H. M.(1952). Portfolio Selection. The Journal of Finance. 7 (1): 77-91.
- MARKOWITZ, M.H. (1959). Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. New Haven and London. Yale University Press.
- MEUCCI, A. (2006). Beyond Black-Litterman in Practice: A Five-Step Recipe to Input Views on Non-Normal Markets. Advanced Risk and Portfolio Management. http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=872577. (03.03.2012).
- MEUCCI, A. (2008). The Black-Litterman Approach: Original Model and Extensions. The Encyclopedia of Quantitative Finance. Wiley. http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1117574. (03.03.2012).
- PEZIER, J. (2007). Global Portfolio Optimization Revisited: A Least Discrimination Alternative to Black-Litterman. ICMA Centre Discussion Papers in Finance. DP2007-07.http://www.icmacentre.ac.uk/files/discussion-papers/DP2007_07.pdf. (18.03.2013)
- QIAN E. ve GORMAN, S. (2001). Conditional Distribution in Portfolio Theory. Financial Analysts Journal. 57 (2): 44-51.
- SATCHELL, S. ve SCOWCROFT, A.(2000). A Demystification of the Black-Litterman Model: Managing Quantitative and Traditional Portfolio Construction. Journal of Asset Management. 1 (2): 138-150.
- SILVA, A.S.D, LEE, W. ve PORNROJNANGKOOL, B. (2009). The Black-Litterman Model for Active Portfolio Management. The Journal of Portfolio Management. 35 (2): 61-70.
- ULUCAN, A. (2004). Portföy Optimizasyonu Kuadratik Programlama Tabanlı Modelleme. Ankara: Siyasal Kitabevi.
- WALTERS, J. (2008). The Black-Litterman Model: A Detailed Exploration:1-39. http://www.master272.com/finance/BL/JWalters_Black-Litterman.pdf. (10.10.2011)
- WALTERS, J. (2009). The Black-Litterman Model in Detail.1-51. http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1314585.(10.10.2011).
- WALTERS, J. (2011). The Black-Litterman Model in Detail.1-56. <http://www.blacklitterman.org/Black-Litterman.pdf>.(09.01.2012).
- WANG, X. (2012). The Study of BL Asset Allocation Model Based on Inflation. Communications in Information Science and Management Engineering. 2 (3): 47-51.
- XU, P., CHEN, A. ve TSUI, P.W. (2008). Black-Litterman Model. <http://book.marketing5.net/download.php?id=252>.(25.02.2012).